ĐỀ THI VÀ BÀI GIẢI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2007

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu 1 (2 điểm): Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = – 1.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Câu 2 (2 điểm): 1. Giải phương trình : $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x + \left(1+\cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$.

2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực : $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$

Câu 3 (2điểm): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad \text{và} \quad d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): 7x + y – 4z = 0 và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Câu IV (2 điểm): 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: y = (e + 1)x, $y = \left(1 + e^x\right)x$

2. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện xyz = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

Phần tự chọn V.a hoặc V.b

V.a . (Không phân ban) (2 đ)

1. Trong mp với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có A(0;2), B (-2;-2), C (4;-2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết pt đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

2. CMR: $\dfrac{1}{2}C_{2n}^1 + \dfrac{1}{4}C_{2n}^3 + \dfrac{1}{6}C_{2n}^5 + \ldots + \dfrac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \dfrac{2^{2n}-1}{2n+1}$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

V.b (Phân ban) (2 đ)

1. Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{1/3}(2x+3) \le 2$

2. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là Δ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh: AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

BÀI GIẢI

Câu I :

1/ Với $m = -1$: $y = \dfrac{x^2 - 3}{x+2} = x - 2 + \dfrac{1}{x+2}$ MXĐ : D = R \ {-2}

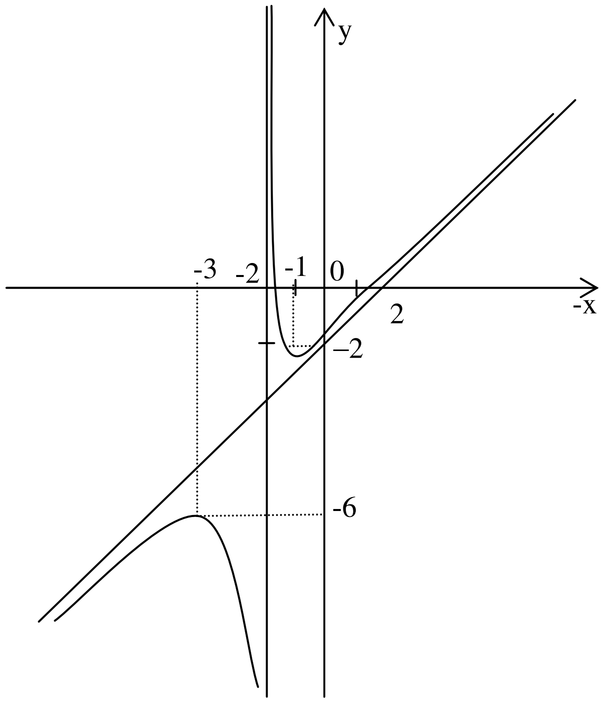
$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$

TCĐ : x = - 2; TCX : y = x – 2 ; $y(0) = -\dfrac{3}{2}$

BBT :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y’		+	0	−	‖	−	0	+	
y	-∞	↗	-6	↘	-∞ ‖ +∞	↘	−2	↗	+∞
			CĐ				CT		

Đồ thị :



Đồ thị cắt trục hoành tại $(\pm\sqrt{3}\,;0)$

2/ $y' = \dfrac{x^2 + 4x - m^2 + 4}{(x+2)^2}$

Hàm số (1) có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ y’ = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Khi $m \neq 0$ gọi A, B là 2 điểm cực trị

Ta có: A(- 2 – m ; - 2) ; B (- 2 + m ; 4m – 2)

ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + 8m - 8 = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad m = -4 \pm 2\sqrt{6}$ (thỏa $m \neq 0$)

Câu II (2 điểm):

1/ $\cos x + \sin^2 x\cos x + \sin x + \cos^2 x\sin x = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow\ (\sin x + \cos x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow\ (\sin x + \cos x)\,[(\sin x + \cos x) - \sin x\cos x - 1] = 0$

$\Leftrightarrow\ \sin x + \cos x = 0$ hay $(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow$ tgx = – 1 hay sinx = 1 hay cosx = 1

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hay $x = k2\pi, k \in Z$

2/ $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{(x-1)(x+1)}$, ĐK : $x \geq 1$

Cách 1: Khi x = 1 thì m = 0 Vậy khi m = 0 thì hệ có nghiệm x = 1

Khi x > 1 , phương trình tương đương

$3+m\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=2\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Đặt t = $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ Ta có: với x > 1 thì t > 1

Khi đó phương trình thành $mt^2 + 3 = 2t$ $\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{t}-\dfrac{3}{t^2}$

Ta có: $m'=\dfrac{-2t+6}{t^3}$, m' = 0 $\Leftrightarrow t=3$. Khi t ∈ (1 ; 3] thì m tăng và nhận giá trị trên $(-1;\dfrac{1}{3}]$

Khi t ∈ (3 ; +∞] thì m giảm và và nhận giá trị trên $(\dfrac{1}{3};0)$

Do đó: yêu cầu bài toán tương đương với $-1<m\le\dfrac{1}{3}$

Cách 2: Chia 2 vế cho x + 1 phương trình thành : $m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}-3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Đặt u = $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ Ta có: với x > 1 thì 0 < u < 1

Phương trình thành $m = 2u - u^2$ đây là hàm bậc 2 có miền giá trị trên (0 ; 1) là $(-1;\dfrac{1}{3}]$

Do đó: yêu cầu bài toán tương đương với $-1<m\le\dfrac{1}{3}$

Câu III (2 điểm):

1/ d_1 qua A (0;1;–2) VTCP $\overrightarrow{a}$ = (2;–1;1) ; d_2 qua B (–1;1;3) VTCP $\overrightarrow{b}$ = (2;1;0)

Ta có : $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ = (–1;,2;4) ; $\overrightarrow{AB}$ = (–1;0;5)

Do $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{AB}$ = 1 + 0 + 20 = 21 ≠ 0 nên d_1, d_2 chéo nhau.

2/ Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và ⊥ (P), (α) có VTCP $\overrightarrow{a}$ = (2;–1;1) và $\overrightarrow{n_p}$ = (7;1;-4)

⇒ PVT $\overrightarrow{m_\alpha}$ = (3;15;9) = 3(1;5;3).

Phương trình (α) : 1(x – 0) + 5(y – 1) + 3(2 + 2) = 0 ⇔ x + 5y + 3x + 1 = 0

__Cách 1__ : Gọi N = d_2 ∩ α

Do N ∈ d_2 ⇒ ∃t : N(–1 + 2t; 1 + t ; 3)

N ∈ (α) ⇒ (–1 + 2t) + 5(1 + t) + 9 + 1 = 0

⇒ 7t + 14 = 0 ⇒ t = – 2

Vậy N (–5; –1; 3)

Phương trình (d) cần tìm : $\dfrac{x+5}{7}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$

__Cách 2__ : Gọi (β) là mặt phẳng qua d_2 và ⊥ (P);

(β) có VTCP $\overrightarrow{b}$ = (2;1;0) và $\overrightarrow{n_p}$ = (7;1;–4)

⇒ PVT $\overrightarrow{k_\beta}$ = (–4; 8 ; –5)

Phương trình (β) : –4(x + 1) + 8(y – 1) – 5(z – 3) = 0

⇔ – 4x + 8y – 5z + 3 = 0

Phương trình (d) : $\begin{cases}x+5y+3z+1=0\\-4x+8y-5z+3=0\end{cases}$

__Câu IV__ : 1/ Phương trình hoành độ giao điểm hai đường:

$(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$

Nhận xét: Với $\forall x \in [0;1] \Rightarrow x(e^x - e) \leq 0$

$S = -\int_0^1 x(e^x - e)dx$ $\quad$ $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = (e^x - e)dx$ Chọn $v = e^x - ex$

$$S = \left[x(e^x - ex)\right]_0^1 + \int_0^1 (e^x - ex)dx = \left[e^x - e\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \text{ (đvdt)}$$

2/ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương và x.y.z = 1 ta có:

$$P \geq \frac{x^2\, 2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2\, 2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2\, 2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

$$= 2\left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}\right)$$

Đặt: $a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}$; $b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$; $c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}$

$$\Rightarrow x\sqrt{x} = \frac{c - 2a + 4b}{9};\ y\sqrt{y} = \frac{a - 2b + 4c}{9};\ z\sqrt{z} = \frac{b - 2c + 4a}{9}$$

Từ đó: $P \geq 2\left[\frac{1}{9}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - \frac{6}{9}\right]$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si cho 3 số dương ta có :

$$P \geq 2\left[\frac{1}{9}.3 + \frac{4}{9}.3 - \frac{6}{9}\right] = 2$$

Vậy min P = 2 $\Leftrightarrow$ x = y = z = 1

V.a . (Không phân ban) (2 đ)

1/ Gọi H(x; y). Ta có $\overrightarrow{BH} = (x + 2; y + 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$, $\overrightarrow{AH} = (x; y - 2)$.

H là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABC nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) - 4(y+2) = 0 \\ 4(y-2) + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy H(1; 1)

M và N lần lượt là trung điểm AB và BC nên M(−1, 0); N(1, −2)

Gọi I là tâm đường tròn cần tìm.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} IH^2 = IN^2 \\ IH^2 = IM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Bán kính $R = IM = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

2/ Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2+x^3C_{2n}^3+x^4C_{2n}^4+...+x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+x^{2n}C_{2n}^{2n}$

$$I=\int_0^1(1+x)^{2n}dx=\left[xC_{2n}^0+\frac{x^2}{2}C_{2n}^1+\frac{x^3}{3}C_{2n}^2+\frac{x^4}{4}C_{2n}^3+...+\frac{x^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}C_{2n}^{2n}\right]_0^1$$

$$=C_{2n}^0+\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{4}C_{2n}^3+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}\ (1)$$

$$J=\int_0^{-1}(1+x)^{2n}dx=-C_{2n}^0+\frac{1}{2}C_{2n}^1-\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{4}C_{2n}^3-...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}-\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}\ (2)$$

(1) + (2) được : $I+j=2\left[\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}\right]$

Mà $I+J=\left.\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1+\left.\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^{-1}$

$$=\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1}+\frac{0-1}{2n+1}$$

$$=\frac{2^{2n+1}-2}{2n+1}=\frac{2(2^n-1)}{2n+1}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu V.b: 1/ Điều kiện $x>\frac{3}{4}$

Bpt $\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2-\log_3(2x+3)\le 2$ $\quad\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2\le 2+\log_3(2x+3)$

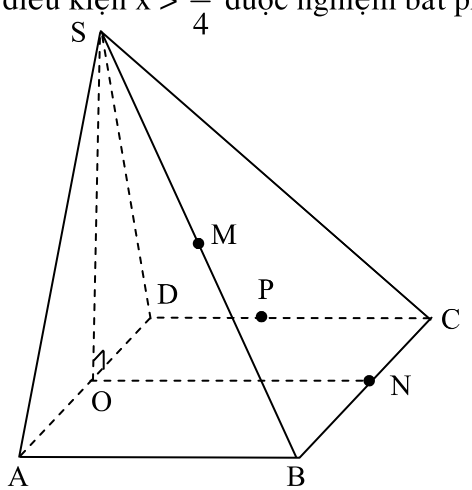
$\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2\le \log_3 9(2x+3)$ $\quad\Leftrightarrow (4x-3)^2\le 9(2x+3)$

$\Leftrightarrow 16x^2-24x+9\le 18x+27$ $\quad\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0$

$\Leftrightarrow 8x^2-21x-9\le 0$ $\quad\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le x\le 3$

So điều kiện $x>\frac{3}{4}$ được nghiệm bất phương là $\boxed{\frac{3}{4}<x\le 3}$

V. b: 2/



Gọi O là trung điểm của AD

Δ SAP đều $\Rightarrow$ SO $\perp$ AD

Mà Mp(SAD) $\perp$ Mp (ABCD) nên SO $\perp$ Mp (ABCD)

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz, sao cho: $A(\frac{a}{2},0,0); D(-\frac{a}{2},0,0)$; N(0,a,0)

$\Rightarrow B(\frac{a}{2},a,0); C(-\frac{a}{2},a,0); S(0,0,\frac{a\sqrt{3}}{2}); M(\frac{a}{4},\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{4}); P(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$

a. $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{a}{4},\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $\overrightarrow{BP}=\left(-a,-\frac{a}{2},0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=0 \Rightarrow AM \perp BP$

b. $\overrightarrow{CN}=(\frac{a}{2},0,0)$; $\overrightarrow{CP}=(0,-\frac{a}{2},0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right]=(0,0,-\frac{a^2}{4})$; $\overrightarrow{CM}=(\frac{3a}{4},-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{4})$

$\Rightarrow V_{CMNP}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}].\overrightarrow{CM}\right|=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.