ĐỀ THI VÀ BÀI GIẢI TÓAN KHỐI B

Câu I : (2đ) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1), m : tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O. Câu II : (2 đ) 1. Giải phương trình : $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

2. Chứng minh răng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt : $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$ Câu III (2đ). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P) : $2x - y + 2z - 14 = 0$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo 1 đường tròn có bán kính bằng 3.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khỏang cách từ M đến mặt phẳng (P) lớnnhất.

Câu IV (2đ). 1. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y = x.\ln x$; $y = 0$; $x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

2. Cho y, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{y.z}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

PHẦN TỰ CHỌN V.a (Không phân ban) (2đ)

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Niutơn của $(2 + x)^n$, biết :

$$3^n.C_n^0 - 3^{n-1}.C_n^1 + 3^{n-2}.C_n^2 - 3^{n-3}.C_n^3 + ... + (-1)^n.C_n^n = 2048$$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho A(2;2) và các đường thẳng d_1: x+y-2=0; d_2 : x+y-8=0.

Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

V.b (2đ) 1. GPT : $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$ 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh : MN vuông góc BD và tính (theo a) khỏang cách giữa 2 đường thẳng MN và AC.

BÀI GIẢI:

Câu I: 1) m = 1; $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. MXĐ : D = R ; $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4 CT	$\nearrow$	0 CĐ	$\searrow$	$-\infty$

$y'' = -6x + 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. ĐU là (1,-2)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		+	0	$-$	
(C)		lõm	ĐU	lồi	

Đồ thị : HS tự vẽ.

2) $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$, có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - m \vee x = 1 + m$

Do đó (1) có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow 1 - m \neq 1 + m \Leftrightarrow m \neq 0$

Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1)

$\Rightarrow A(1 + m; 2(m^3 - 1)); B(1 - m; -2(m^3 + 1))$

Ta có : $OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \Leftrightarrow 4m = 16m^3 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} (\text{vì } m \neq 0) \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Câu II : 1. $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

$\Leftrightarrow -\cos 4x + 2\cos 4x\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$ hay $\sin 3x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$ hay $x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$ hay $x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$ $(k\in z)$

2. $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$ (1); Ta có $\forall m>0$ thì (1) tương đương

$(x-2)(x+4)=\sqrt{m(x-2)} \Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left[\sqrt{x-2}(x+4)-\sqrt{m}\right]=0 \Leftrightarrow x=2$ hay $\sqrt{m}=(x+4)\sqrt{x-2}$ (*)

$f(x) = (x+4)\sqrt{x-2}\ (x\geq 2);\ f'(x)=\sqrt{x-2}+\frac{x+4}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2(x-2)+x+4}{2\sqrt{x-2}}=\frac{3x}{2\sqrt{x-2}}>0\ \forall x>2$

=> f luôn luôn tăng $\forall x>2 \Rightarrow f(x)>f(2)=0$ và $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$ nên $\forall m>0$:(*) luôn luôn có nghiệm duy nhất $\neq 2$ $\Rightarrow$ (1) luôn luôn có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu III : Phương trình (S) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$, có tâm I(1, -2, -1), R = 3.

1. Phương trình (Q) chứa Ox có dạng my + nz = 0 ($m^2 + n^2 \neq 0$) ; (Q) cắt (S) theo (C) có r = R = 3. Vậy tâm I nằm trên (Q) $\Rightarrow$ n = - 2m. Chọn m = 1 và n = - 2. Phương trình (Q) là : y - 2z = 0.

2. Cách 1: Ta có khỏang cách từ I đến (P) bằng 4 > R. Vậy (P) và (S) không có điểm chung.

Phương trình (d) qua I vuông góc (P) là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Thay vào pt mặt cầu (S) ta được : t = $\pm$ 1

Vậy (d) cắt (S) tại điểm A(3;-3;1) và B(-1;-1;-3). Ta có khỏang cách từ A đến (P) bằng 1. Khỏang cách từ B đến (P) bằng 7. Vậy M(-1;-1;-3) thì khỏang cách từ M đến (P) lớn nhất.

Cách 2 : $\forall M(x_0,y_0,z_0)\in(S)\Leftrightarrow(x_0-1)^2+(y_0+2)^2+(z_0+1)^2=9$

Ta có khỏang cách từ M tới (P) là : $\frac{1}{3}|2x_0-y_0+2z_0-14|$.

Ta có $|2(x_0-1)-(y_0+2)+2(z_0+1)|\leq\sqrt{9}\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0+2)^2+(z_0+1)^2}=9$

$\Rightarrow -21\leq 2x_0-y_0+2z_0-14\leq -3 \Rightarrow d(M,(P))\leq 7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0+2}{-1}=\frac{z_0+1}{2} \\ 2x_0-y_0+2z_0=-7 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=-1; y_0=-1; z_0=-3$

Câu IV :1. Phương trình hòanh độ giao điểm : xlnx = 0 (với đk x > 0) $\Leftrightarrow$ lnx = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1.

Vậy V = $\pi\int_1^e (x\ln x)^2dx$ Đặt $u_1 = \pi\ln^2 x \Rightarrow du_1=\frac{2\pi}{x}\ln x.dx$; $dv_1 = x^2.dx$, chọn $v_1=\frac{x^3}{3}$

Đặt $u_2 = \ln x \Rightarrow du_2=\frac{dx}{x}$; $dv_2 = x^2.dx$, chọn $v_2=\frac{x^3}{3}$

Vậy : V = $\frac{\pi e^3}{3}-\frac{2\pi}{9}\left[x^3\ln x\right]_1^e+\frac{2\pi}{9}\int_1^e x^2.dx=\frac{\pi}{27}(5e^3-2)$ (đvtt)

2. $P=x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2yz}+\frac{1}{2yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2xz}+\frac{1}{2xz}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2yx}+\frac{1}{2yx}\right) \geq \frac{3}{2}\left[x\sqrt[3]{\frac{x}{y^2z^2}}+y\sqrt[3]{\frac{y}{x^2z^2}}+z\sqrt[3]{\frac{z}{y^2x^2}}\right]$

$\geq\frac{3}{2}.3\sqrt[9]{\frac{x^4.y^4.z^4}{x^4.y^4.z^4}}=\frac{9}{2}$ (Áp dụng Cosi cho 3 số không âm 2 lần). Khi x = y = z = 1 ta có P = $\frac{9}{2}$.

Vậy min P = $\frac{9}{2}$

Cách khác: $P=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2yz}+\frac{x}{2yz}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2xz}+\frac{y}{2xz}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{z}{2yx}+\frac{z}{2yx}\right)$

Áp dụng BĐT Cosi cho 9 số ta có kết quả như trên.

Câu V.a 1) $(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-2}+C_n^2x^{n-2}-C_n^3x^{n-3}+...+(-1)^nC_n^n$

Cho x = 3 : $2^n=3^n.C_n^0-3^{n-1}.C_n^1+3^{n-2}.C_n^2-3^{n-3}.C_n^3+...+(-1)^n.C_n^n=2048=2^{11}\Leftrightarrow n=11$

Ta có : $(2+x)^{11}=\sum_{k=0}^{n}C_{11}^k2^{11-k}x^k$. Số hạng chứa x^{10} ứng với k = 10.

Hệ số của số hạng chứa x^{10} là : $C_{11}^{10}2 = 22$

2) $B \in d_1 \Leftrightarrow B(m, 2-m); C \in d_2 \Leftrightarrow C(n, 8-n)$

$\overrightarrow{AB} = (m-2, -m); \overrightarrow{AC} = (n-2, 6-n)$

Tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(n-2) - m(6-n) = 0 \\ (m-2)^2 + m^2 = (n-2)^2 + (6-n)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-4)(m-1) = 2 \\ (m-1)^2 - (n-4)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-4 = \dfrac{2}{m-1} \\ (m-1)^4 - 3(m-1)^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 5 \end{cases} \text{V} \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(3;-1) \\ C(5;3) \end{cases} \text{V} \begin{cases} B(-1;3) \\ C(3;5) \end{cases}$

Câu V.b 1) Đặt $t = (\sqrt{2}+1)^x > 0$, pt $\Leftrightarrow \dfrac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \pm 1 (n)$

Do đó phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x = (\sqrt{2}+1)^{\pm 1} \Leftrightarrow x = \pm 1$

2) Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz ta có :

$A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right); C\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right); B\left(0, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right); D\left(0, -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right); S(0, 0, h)$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}, 0, \dfrac{h}{2}\right); E\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, h\right); M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a\sqrt{2}}{4}, \dfrac{h}{2}\right); N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}, \dfrac{a\sqrt{2}}{4}, 0\right)$

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}; 0; -\dfrac{h}{2}\right); \overrightarrow{AC} = \left(-a\sqrt{2}; 0; 0\right); \overrightarrow{AM} = \left(0, \dfrac{a\sqrt{2}}{4}, \dfrac{h}{2}\right); \overrightarrow{BD} = \left(0; -a\sqrt{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = \left(-\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right).(0) + (0)\left(-a\sqrt{2}\right) + \left(-\dfrac{h}{2}\right).(0) = 0 \Rightarrow$ MN vuông góc BD

$d(MN, AC) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}]\right|} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

Hà Văn Chương, Hồ Vĩnh Đông
(Đại học Sư Phạm TP.HCM)