ĐỀ VÀ BÀI GIẢI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2007
Môn thi: TOÁN, khối D

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$.
2. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm)

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1;4;2), B(-1;2;4) và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$.

1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất .

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I=\displaystyle\int_1^e x^3\ln^2 x\,dx$.
2. Cho $a\ge b>0$. Chứng minh rằng: $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\dfrac{1}{2^b}\right)^a$.

PHẦN TỰ CHỌN (Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai câu: V.a hoặc V.b)

Câu V.a. Theo chương trình THPT <u>không</u> phân ban (2 điểm)

1. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.
2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và đường thẳng d: $3x - 4y + m = 0$.

   Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Câu V. b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_2(4^x+15.2^x+27)+2\log_2\dfrac{1}{4.2^x-3}=0$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số: $y=\dfrac{2x}{x+1}$. $\qquad$ D = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$, TCĐ: x = - 1 , TCN: y = 2

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Đồ thị: Học sinh tự vẽ.

2. Pttt tại M (x_o, y_o) là d : $y-\dfrac{2x_o}{x_o+1}=\dfrac{2}{(x_o+1)^2}(x-x_o)$

A = d $\cap$ Ox $\Rightarrow$ A ($-x_o^2$; 0); $\qquad$ B = d $\cap$ Oy $\Rightarrow$ B (0; $\dfrac{2x_o^2}{(x_o+1)^2}$)

Ta có $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}|x_A|.|y_B|=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_o^2.\dfrac{2x_o^2}{(x_o+1)^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x_o^2=|x_o+1|$ $\quad$ ($x_o\neq -1$)

$\Leftrightarrow x_o+1=\pm 2x_o^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=1\Rightarrow y_o=1\\ x_o=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y_o=-2\end{array}\right.$ $\quad$ Vậy M (1; 1) hoặc M ($-\dfrac{1}{2}$; -2)

Câu II:

1. Pt $\Leftrightarrow$ 1 + sinx + $\sqrt{3}$ cosx = 2 $\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{6}=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ hay $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in Z)$

2. Đặt u = $x+\dfrac{1}{x}$; v = $y+\dfrac{1}{y}$. ĐK : $|u|\geq 2,|v|\geq 2$. Hệ thành: $\begin{cases}u+v=5\\ u^3-3u+v^3-3v=15m-10\end{cases}$

Đặt S = u + v, P = u.v $\qquad$ Hệ thành : $\begin{cases}S=5\\ S(S^2-3P)-3S=15m-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=5\\ P=8-m\end{cases}$

Khi đó u, v là nghiệm của pt : $X^2-5X+8-m=0\Leftrightarrow X^2-5X+8=m$ (*)

Xem hàm số $Y=X^2-5X+8$; Y' = 2X − 5; Y' = 0 $\Leftrightarrow$ $X=\dfrac{5}{2}$

X	$-\infty$		-2		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Y'		−				−	0	+	
Y	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm X_1, X_2 thỏa $|X_1|\geq 2$ và $|X_2|\geq 2\Leftrightarrow\dfrac{7}{4}\leq m\leq 2$ hay m ≥ 22

Câu III.

1. G (0; 2; 2). VTCP d : $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = 6(2;-1;1)$. Suy ra pt d : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$

2. $\Delta : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$. M ∈ Δ ⇔ M (1 – t; –2 + t; 2t)

   Ta có: $p = MA^2 + MB^2 = t^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2 + (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2$
   $= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28$

   Min p = 28 ⇔ t = 2. Vậy M (–1; 0; 4)

Câu IV.

1. Đặt : $u = \ln^2 x$, $dv = x^3dx$. Suy ra : $du = \dfrac{2\ln x}{x}dx$, chọn $v = \dfrac{x^4}{4}$

   $\Rightarrow I = \dfrac{x^4}{4}\ln^2 x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3.\ln x dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{2}J$

   $J = \int_1^e x^3 \ln x dx$. Đặt : u = lnx, $dv = x^3dx \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$, chọn $v = \dfrac{x^4}{4}$

   $\Rightarrow J = \dfrac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{x^4}{16}\Big|_1^e = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{e^4}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{3e^4+1}{16}$ $\Rightarrow I = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{3e^4+1}{32} = \dfrac{5e^4-1}{32}$

2. $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$ $(a \geq b > 0)$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}.\ln\left(\dfrac{2^{2a}+1}{2^a}\right) \leq \dfrac{1}{b}.\ln\left(\dfrac{2^{2b}+1}{2^b}\right)$

   $\Leftrightarrow \ln 2\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{2^{2a}+1}{2^a}\right)}{\ln 2^a}\right] \leq \ln 2\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{2^{2b}+1}{2^b}\right)}{\ln 2^b}\right]$ (*). Đặt $f(t) = \ln 2\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{t^2+1}{t}\right)}{\ln t}\right]$; t > 1

   $\Rightarrow f'(t) = \dfrac{\ln 2}{t.\ln^2 t}.\left[\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)\ln t - \ln\left(\dfrac{t^2+1}{t}\right)\right] < 0, \forall t > 1$

   (vì $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)\ln t < \ln t$ và $\ln\left(\dfrac{t^2+1}{t}\right) > \ln t$, ∀t > 1) ⇒ f nghịch biến trên (1, +∞)

   $\Rightarrow f(2^a) \leq f(2^b)$ (vì $a \geq b > 0 \Rightarrow 2^a \geq 2^b > 1$) ⇒ (*) đúng ⇒ đpcm.

Câu V.a.

1. Số hạng chứa x^5 trong khai triển thành đa thức là: $xC_5^4(-2x)^4 + x^2C_{10}^3(3x)^3 = 3320x^5$

   Vậy hệ số của x^5 là : 3320.

2. Đường tròn (C) có tâm I (1; -2); bán kính R = 3

   Vì ΔABP đều ⇒ $\widehat{APB} = 60^o \Rightarrow \widehat{API} = 30^o \Rightarrow IP = 2IA = 6$

   Ycbt ⇔ d (I, d) = $\dfrac{|3+8+m|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11+m| = 30$ ⇔ m = 19 hay m = –41

Câu V.b.

1. pt ⇔ $\log_2(4^x + 15.2^x + 27) = 2\log_2(4.2^x - 3)$

   Đặt $t = 2^x$ (đk: $t > \dfrac{3}{4}$) Ta có : $t^2 + 15t + 27 = (4t-3)^2 \Leftrightarrow 5t^2 - 13t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hay $t = -\dfrac{2}{5}$ (loại)

   Vậy : $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$

2. Từ giả thiết $\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C. Ta có: $SA \perp CD$ và $AC \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC)$
$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.
$AD \,//\, (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. $V_{SHCD} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta SHC}.d(D,(SHC)) = \dfrac{1}{3}S_{\Delta SCD}.d(H,(SCD)) \Rightarrow d(H, (SCD)) = \dfrac{a}{3}$

PHẠM VIẾT KHA (ĐHCN TPHCM)